石景山区2017年高三统一练习

数学（文）试卷

考生须知	1．本试卷共6页，共三道大题，20道小题，满分150分．考试时间120分钟． 2．在答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号． 3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，选择题、作图题请用2B铅笔作答，其他试题请用黑色字迹签字笔作答，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{x\mid 2x-1<0\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，那么 $A\cap B$ 等于（　　）

A．$\{x\mid x\geqslant 0\}$　　B．$\{x\mid x\leqslant 1\}$

C．$\{x\mid 0<x<\frac{1}{2}\}$　　D．$\{x\mid 0\leqslant x<\frac{1}{2}\}$

2．以 $(-1,1)$ 为圆心且与直线 $x-y=0$ 相切的圆的方程是（　　）

A．$(x+1)^2+(y-1)^2=2$　　B．$(x+1)^2+(y-1)^2=4$

C．$(x-1)^2+(y+1)^2=2$　　D．$(x-1)^2+(y+1)^2=4$

3．下列函数中，偶函数是（　　）

A．$y=2^x-\frac{1}{2^x}$　　B．$y=x\sin x$

C．$y=e^x\cos x$　　D．$y=x^2+\sin x$

4．设 $\theta\in\mathbf{R}$，“$\sin\theta=\cos\theta$”是“$\cos 2\theta=0$”的（　　）

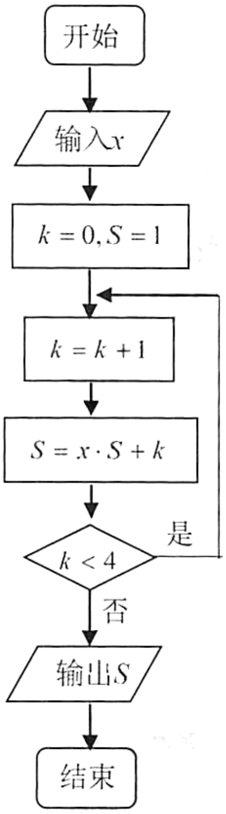
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．我国南宋数学家秦九韶（约公元 1202—1261 年）给出了求 $n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 次多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 当 $x=x_0$ 时的值的一种简捷算法．该算法被后人命名为“秦九韶算法”，例如，可将 3 次多项式改写为：

$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=((a_3x+a_2)x+a_1)x+a_0$

然后进行求值．



运行如图所示的程序框图，能求得多项式（　　）的值．

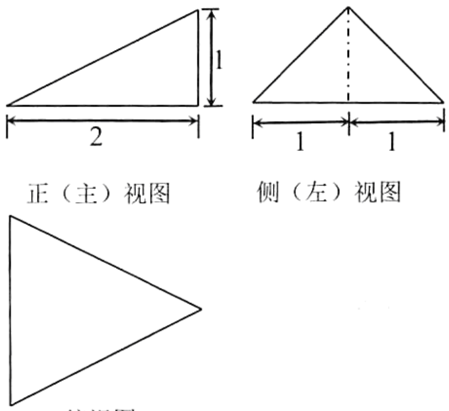
A．$x^4+x^3+2x^2+3x+4$

B．$x^4+2x^3+3x^2+4x+5$

C．x^3+x^2+2x+3

D．x^3+2x^2+3x+4

6．某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的表面积是（　　）



正（主）视图　侧（左）视图

俯视图

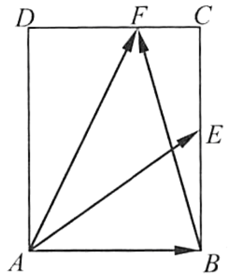
A．$2+\sqrt{5}$

B．$4+\sqrt{5}$

C．$2+2\sqrt{5}$

D．5

7．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在边 CD 上，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值是（　　）



A．$2-\sqrt{2}$　　B．1

C．$\sqrt{2}$　　D．2

8．21 个人按照以下规则表演节目：他们围坐成一圈，按顺序从 1 到 3 循环报数，报数字“3”的人出来表演节目，并且表演过的人不再参加报数．那么在仅剩两个人没有表演过节目的时候，共报数的次数为（　　）

A．19　　B．38　　C．51　　D．57

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

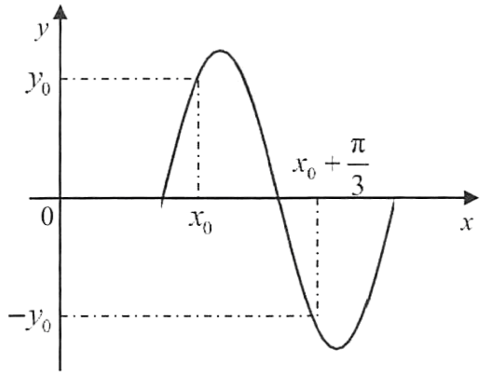
9．若复数 $\dfrac{a+i}{1-i}$ 是纯虚数，则实数 $a=$________．

10．已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x-3y+6\geqslant 0,\\ x\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 那么 $z=y-x$ 的最大值是________．

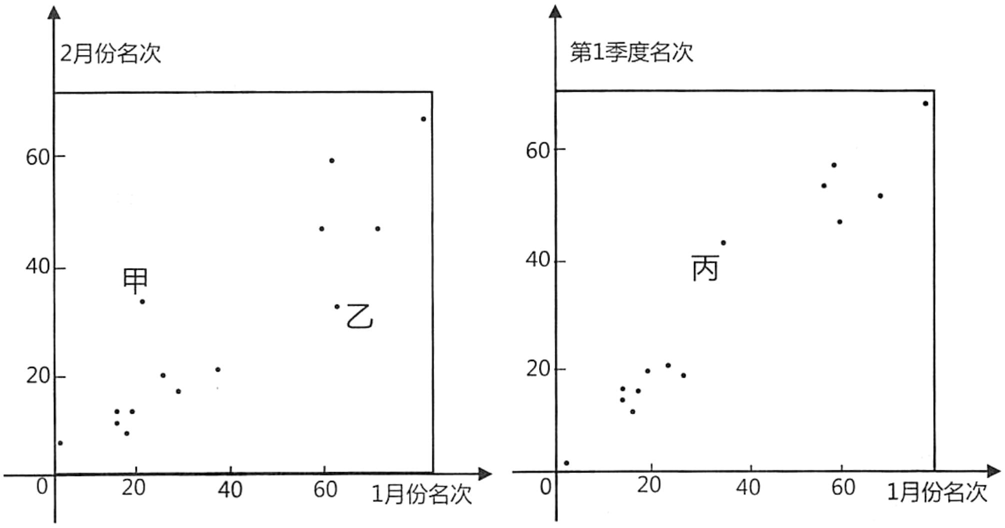
11．若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右顶点重合，则 $p=$______．

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, x\geqslant 0,\\ x-x^2, x<0.\end{cases}$ 若 $f(a)>f(2-a)$，则 a 的取值范围是______．

13．若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的部分图象如图所示，则 $\omega=$______．



14．在环境保护部公布的 2016 年 74 城市 PM2.5 月均浓度排名情况中，某 14 座城市在 74 城的排名情况如下图所示，甲、乙、丙为某三座城市．



从排名情况看，

① 在甲、乙两城中，2 月份名次比 1 月份名次靠前的城市是_________；

② 在第 1 季度的三个月中，丙城市的名次最靠前的月份是_________．

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题共 13 分）

数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2, a_{n+1}=a_n+c\cdot 2^n$（$c$ 是常数，$n=1,2,3\cdots\cdots$），

且 a_1，a_2，a_3 成公比不为1的等比数列．

（Ⅰ）求 c 的值；

（Ⅱ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式．

16．（本小题共 13 分）

已知 a,b,c 分别是 ΔABC 的三个内角 A,B,C 的三条对边，且 $c^2=a^2+b^2-ab$．

（Ⅰ）求角 C 的大小；

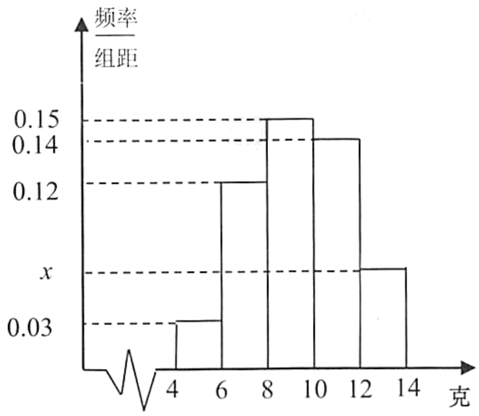
（Ⅱ）求 $\cos A+\cos B$ 的最大值．

17．（本小题共 13 分）

“累积净化量（CCM）”是空气净化器质量的一个重要衡量指标，它是指空气净化器从开始使用到净化效率为 50%时对颗粒物的累积净化量，以克表示．根据 GB/T18801-2015《空气净化器》国家标准，对空气净化器的累计净化量（CCM）有如下等级划分：

累积净化量（克）	（3，5]	（5，8]	（8，12]	12 以上
等级	P1	P2	P3	P4

为了了解一批空气净化器（共 2000 台）的质量，随机抽取 n 台机器作为样本进行估计，已知这 n 台机器的累积净化量都分布在区间（4，14]中．按照（4，6]，（6，8]，（8，10]，（10，12]，（12，14] 均匀分组，其中累积净化量在（4，6]的所有数据有：4.5，4.6，5.2，5.3，5.7 和 5.9，并绘制了如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求 n 的值及频率分布直方图中的 x 值；

（Ⅱ）以样本估计总体，试估计这批空气净化器（共 2000 台）中等级为 P2 的空气净化器有多少台？

（Ⅲ）从累积净化量在（4，6]的样本中随机抽取 2 台，求恰好有 1 台等级为 P2 的概率.

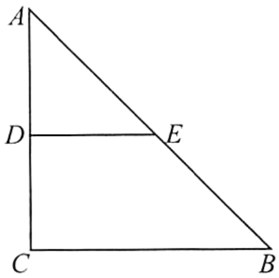
18．（本小题共 14 分）

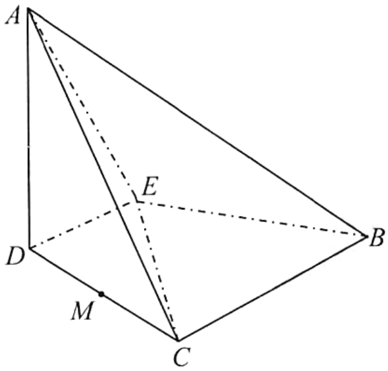
如图，在△ABC中，$\angle C$为直角，$AC=BC=4$．沿△ABC的中位线DE，将平面ADE折起，使得$\angle ADC=90°$，得到四棱锥$A-BCDE$．

（Ⅰ）求证：$BC\perp$平面ACD；

（Ⅱ）求三棱锥$E-ABC$的体积；

（Ⅲ）M是棱CD的中点，过M做平面α与平面ABC平行，设平面α截四棱锥$A-BCDE$所得截面面积为S，试求S的值．





19．（本小题共 13 分）

已知函数$f(x)=e^x$．

（Ⅰ）过原点作曲线$y=f(x)$的切线，求切线方程；

（Ⅱ）当$x>0$时，讨论曲线$y=f(x)$与曲线$y=mx^2(m>0)$公共点的个数．

20．（本小题共 14 分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(0,1)$，且离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）设直线$l:y=\dfrac{1}{2}x+m$与椭圆E交于A、C两点，以AC为对角线作正方形$ABCD$．记直线l与x轴的交点为N，问B,N两点间距离是否为定值？如果是，求出定值；如果不是，请说明理由．

石景山区 2017 年高三统一练习

数学（文）试卷答案及评分参考

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	A	A	C	C	D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

题号	9	10	11	12	13	14
答案	1	3	4	$a>1$	3	乙，二月份

三、解答题共 6 小题，共 80 分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$\because a_1=2, a_{n+1}=a_n+c\cdot 2^n$

$\therefore a_2=a_1+c=2+2c$ ，$a_3=a_2+c\cdot 2^2=2+6c$.

依题意，a_1，a_2，a_3 成公比不为 1 的等比数列，

$\therefore a_2^2=a_1a_3$ ， 即：$(2+2c)^2=2(2+6c)$ ，

化简，得：$c^2-c=0$，

解得，$c=0$ 或 $c=1$.

由于公比不为 1，因此，$c=1$. ……………………………………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知：$a_{n+1}=a_n+2^n$.

因此，$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+2^2$

$a_4=a_3+2^3$

……

$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$，（$n\geqslant 2$，且 $n\in \mathbf{N}^*$）

"叠加"：$a_n=a_1+2+2^2+2^3+\ldots\ldots+2^{n-1}=2+\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=2^n$（$n\geq 2$且$n\in N^*$）.

$\because a_1=2$ $\therefore n=1$时也满足 $a_n=2^n$.

故，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=2^n$（$n\in \mathbf{N}^*$）. ……………………………………13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $c^2=a^2+b^2-ab$，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$.

又因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. …………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $C=\dfrac{\pi}{3}$，

又 $A+B+C=\pi$，

所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}-A$ 且 $A\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，

故 $\cos A+\cos B=\cos A+\cos(\dfrac{2\pi}{3}-A)$

$=\cos A+\cos\dfrac{2\pi}{3}\cos A+\sin\dfrac{2\pi}{3}\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\sin(\dfrac{\pi}{6}+A)$.

又 $A\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，$\dfrac{\pi}{6}+A\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，

所以当 $\dfrac{\pi}{6}+A=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\cos A+\cos B$ 的最大值为 1. ……………………13 分

17.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为在 $(4,6]$ 之间的数据一共有 6 个，

再由频率分布直方图可知：落在 $(4,6]$ 之间的频率为 $0.03\times2=0.06$.

因此，$n=\dfrac{6}{0.06}=100$.

$(0.03+x+0.12+0.14+0.15)\times2=1\therefore x=0.06$. ……………………………………4 分

（Ⅱ）由频率分布直方图可知：落在$(6,8]$之间共：$0.12\times2\times100=24$台，

又因为在$(5,6]$之间共4台，

$\therefore$落在$(5,8]$之间共28台，

故，这批空气净化器等级为$P2$的空气净化器共有560台．……………………………9分

（Ⅲ）设"恰好有1台等级为$P2$"为事件B

依题意，落在$(4,6]$之间共有6台，记为：A_1，A_2，A_3,A_4，A_5，A_6，属于国标$P2$级有4台，我们记为：A_3,A_4，A_5，A_6，

则从$(4,6]$中随机抽取2个，所有可能的结果有15种，它们是：(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,A_5)，(A_1,A_6)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,A_5)，(A_2,A_6)，(A_3,A_4)，(A_3,A_5)，(A_3,A_6)，(A_4,A_5)，(A_4,A_6)，(A_5,A_6)，

而事件B的结果有8种，它们是：(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,A_5)，(A_1,A_6)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,A_5)，(A_2,A_6)．

因此事件B的概率为$P(B)=\dfrac{8}{15}$．……………………………………………………13分

18.（本小题14分）

（Ⅰ）证明：因为$DE//BC$，且$\angle C=90^\circ$，

所以$DE\perp AD$，同时$DE\perp DC$，

又$AD\cap DC=D$，　　所以$DE\perp$面ACD．

又因为$DE//BC$，

所以$BC\perp$平面ACD．……………………4分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知：$BC\perp$ 平面 ACD，又 $AD\subset$ 平面 ADC，

所以 $AD\perp BC$，

又因为 $\angle ADC=90^\circ$，所以 $AD\perp DC$．

又因为 $BC\cap DC=C$，所以 $AD\perp$ 平面 $BCDE$．

所以，$V_{E-ABC}=V_{A-EBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta EBC}\times AD$．

依题意，$S_{\Delta EBC}=\frac{1}{2}BC\times CD=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$．

所以，$V_{E-ABC}=\frac{1}{3}\times 4\times 2=\frac{8}{3}$．　……………………………………………………9 分

（Ⅲ）分别取 AD，EA，AB 的中点 N，P，Q，并连接 MN，NP，PQ，QM．

因为平面 α //平面 ACD，所以平面 α 与平面 ACD 的交线平行于 AC，

因为 M 是中点，所以平面 α 与平面 ACD 的交线是 ΔACD 的中位线 MN．

同理可证，四边形 $MNPQ$ 是平面 α 截四棱锥 $A-BCDE$ 的截面．

即：$S=S_{MNPQ}$．

由（Ⅰ）可知：$BC\perp$ 平面 ACD，所以 $BC\perp AC$，

又 $\because QM//AC, MN//BC \therefore QM\perp MN$．

$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 是直角梯形．

在 $Rt\Delta ADC$ 中，AD=CD=2 $\therefore$ AC=$2\sqrt{2}$．

$MN=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$NP=\frac{1}{2}DE=1$，$MQ=\frac{1}{2}(BC+DE)=3$．

$\therefore S=(1+3)\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$．　……………………………………………………14 分

19.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由题意，设切点为 $M(x_0,y_0)$，由题意可得

$f'(x_0)=\dfrac{y_0-0}{x_0-0}$，即 $e^{x_0}=\dfrac{e^{x_0}}{x_0}$，解得 $x_0=1$，即切点 $M(1,e)$.

所以 $k=\dfrac{e-0}{1-0}=e$，所以切线方程为 $y=ex$.　　　　……………………5 分

（Ⅱ）当 $x>0,m>0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 的公共点个数

即方程 $f(x)=mx^2$ 根的个数.

由 $f(x)=mx^2$ 得 $m=\dfrac{e^x}{x^2}$.

令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{xe^x(x-2)}{x^4}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=2$，

随 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值 $g(2)$	↗

其中 $g(2)=\dfrac{e^2}{4}$.所以 $g(2)$ 为 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值.

所以对曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 公共点的个数，讨论如下：

当 $m\in(0,\dfrac{e^2}{4})$ 时，有 0 个公共点；　当 $m=\dfrac{e^2}{4}$ 时，有1个公共点；

当 $m\in(\dfrac{e^2}{4},+\infty)$ 时，有 2 个公共点.　　　　……………………13 分

20.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c．

因为点（0,1）在椭圆 E 上，所以 $b=1$．

故 $a^2-c^2=1$．

又因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，$a=2$．

所以椭圆 E 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．　……………………5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，线段 AC 中点为 $M(x_0,y_0)$．

联立 $y=\frac{1}{2}x+m$ 和 $x^2+4y^2-4=0$，得：$x^2+2mx+2m^2-2=0$．

由 $\Delta=(2m)^2-4(2m^2-2)=8-4m^2>0$，可得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

所以 $x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-2$．

所以 AC 中点为 $M(-m,\frac{1}{2}m)$．

弦长 $|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{10-5m^2}$，

又直线 l 与 x 轴的交点 $N(-2m,0)$．

所以 $|MN|=\sqrt{(-m+2m)^2+(\frac{1}{2}m)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}m^2}$．

所以 $|BN|^2=|BM|^2+|MN|^2=\frac{1}{4}|AC|^2+|MN|^2=\frac{5}{2}$．

所以 B、N 两点间距离为定值 $\frac{\sqrt{10}}{2}$．　…………14 分

【注：若有其它解法，请酌情给分】