2017 年北京高考数学（理科）参考答案与解析

学而思高考研究中心——陈晨、陈铖、成文波、邓一维、杜鹏、冯凯、冯涛、宫毅、郭化楠、哈茹雪、胡铎耀、景肖龙、刘安、林琳、林原田、潘杨、潘玥、邵春阳、苏泊文、孙玺、唐云、王侃、王明路、王睿瑶、王硕、问延炜、吴承峰、杨连锋、杨明思、张鹏

1. A

【解析】集合 $A=\{x\,|\,-2<x<1\}$ 与集合 $B=\{x\,|\,x<-1或x>3\}$ 的公共部分为 $\{x\,|\,-2<x<-1\}$，

故选 A.

2. B

【解析】$(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=(a+1)+(1-a)\mathrm{i}$，$\because$ 对应的点在第二象限，$\therefore \begin{cases} a+1<0 \\ 1-a>0 \end{cases}$ 解得：$a<-1$

故选 B.

3. C

【解析】当 $k=0$ 时，$k<3$ 成立，进入循环，此时 $k=1$，$s=2$；

当 $k=1$ 时，$k<3$ 成立，继续循环，此时 $k=2$，$s=\frac{3}{2}$；

当 $k=2$ 时，$k<3$ 成立，继续循环，此时 $k=3$，$s=\frac{5}{3}$；

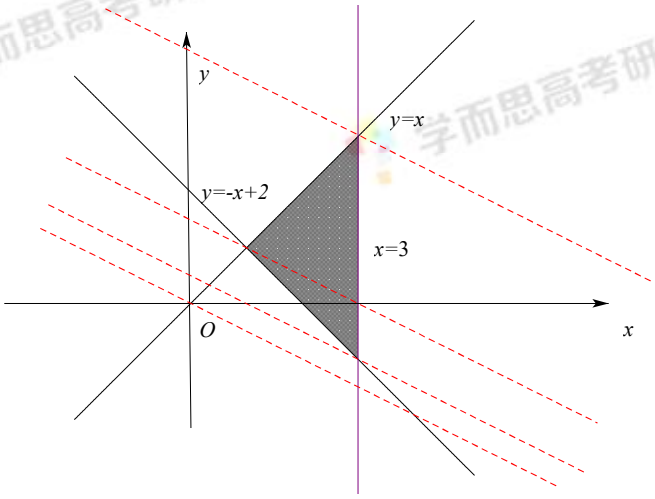
当 $k=3$ 时，$k<3$ 不成立，循环结束，输出 s.

故选 C.

4. D

【解析】设 $z=x+2y$，则 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，由下图可行域分析可知，在 $(3,3)$ 处取得最大值，

代入可得 $z_{\max}=9$，故选 D.



5. A

【解析】奇偶性：$f(x)$ 的定义域是 R，关于原点对称，

由 $f(-x)=3^{-x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-3^{x}=-f(x)$ 可得 $f(x)$ 为奇函数.

单调性：函数 $y=3^{x}$ 是 R 上的增函数，函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 是 R 上的减函数，根据单调性的运算，增函数减去减函数所得新函数是增函数，即 $f(x)=3^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 是 R 上的增函数.综上选 A

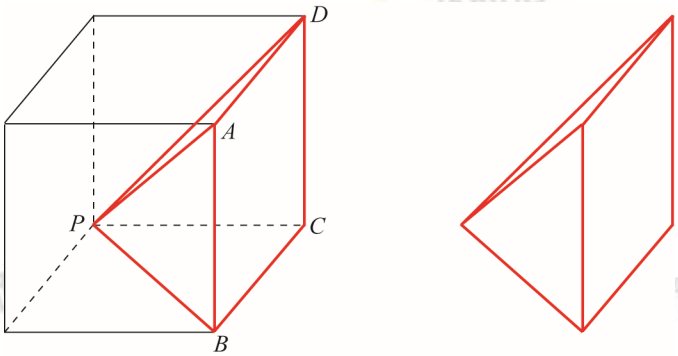
6. A

【解析】由于 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 是非零向量，“存在负数 λ，使得 $\vec{m}=\lambda\vec{n}$．”根据向量共线基本定理可知 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 共线，由于 $\lambda<0$，所以 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 方向相反，从而有 $\vec{m}\cdot\vec{n}<0$，所以是充分条件。反之，若 $\vec{m}\cdot\vec{n}<0$，$\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 方向相反或夹角为钝角时，$\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 可能不共线，所以不是必要条件。综上所述，可知 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$”是“$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$”的充分不必要条件，所以选 A.

7. B

【解析】如下图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，最长的棱为 PA，

所以 $PA=\sqrt{PC^{2}+AC^{2}}=\sqrt{2^{2}+(2\sqrt{2})^{2}}=2\sqrt{3}$，故选 B.



8. D

【解析】由于 $\lg\frac{M}{N}=\lg M-\lg N=\lg 3^{361}-\lg 10^{80}\approx 361\times 0.48-80=93.28$，

所以 $\frac{M}{N}\approx 10^{93.28}$，故选 D.

9. 2

【解析】∵ 双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$

∴ $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$

∴ $c^{2}=3a^{2}$

$\because\ a=1$， $b=\sqrt{m}$， $a^2+b^2=c^2$

$\therefore b^2=m=c^2-a^2=3a^2-a^2=3-1=2$

10. 1

$\because\ \{a_n\}$是等差数列，$a_1=-1$， $a_4=8$，

$\therefore$ 公差$d=3$

$\therefore\ a_2=a_1+d=2$

$\because\ \{b_n\}$为等比数列，$b_1=-1$，$b_4=8$

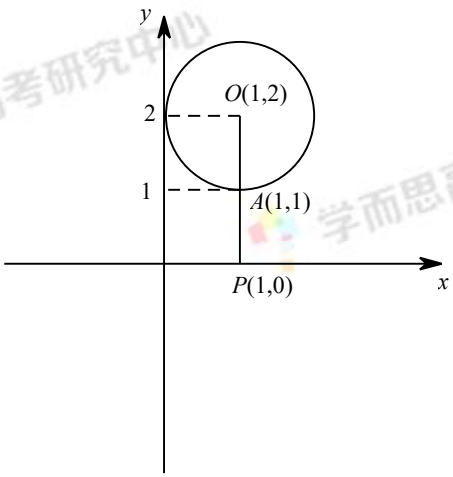
$\therefore$ 公比$q=-2$

$\therefore\ b_2=b_1q=2$

故$\dfrac{a_2}{b_2}=1$

11. 1

把圆$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$改写为直角坐标方程$x^2+y^2-2x-4y+4=0$，化简为$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，它是以$(1,2)$为圆心，1 为半径的圆。画出图形，连结圆心$O$与点$P$，交圆于点$A$，此时$|AP|$取最小值，$A$点坐标为$(1,1)$，$|AP|=1$.



12. $-\dfrac{7}{9}$

$\because$ 因为角α和角β的终边关于y轴对称

$\therefore\ \sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha=-\cos\beta$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha-1=-\frac{7}{9}$

13. -1，-2，-3

由题意知a，b，c均小于0，所以找到任意一组负整数，满足题意即可.

14. ①Q_1

②p_2

【解析】①设线段A_iB_i的中点为$C_i(x_i，y_i)$，则$Q_i=2y_i$，其中$i=1，2，3$.

因此只需比较C_1，C_2，C_3三个点纵坐标的大小即可.

②由题意，$p_i=\frac{y_i}{x_i}$，$i=1，2，3$，故只需比较三条直线OC_1，OC_2，OC_3的斜率即可.

15.

【解析】(1) $\because c=\frac{3}{7}a$

由正弦定理得：$\sin C=\frac{3}{7}\sin A=\frac{3}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

(2) $\because c=\frac{3}{7}a<a$

$\therefore \angle C<\angle A=60^\circ$

$\therefore \angle C$ 为锐角

由 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 得：$\cos C=\frac{13}{14}$

$\therefore \sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$

$=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

又 $\because c=\frac{3}{7}a=\frac{3}{7}\times 7=3$

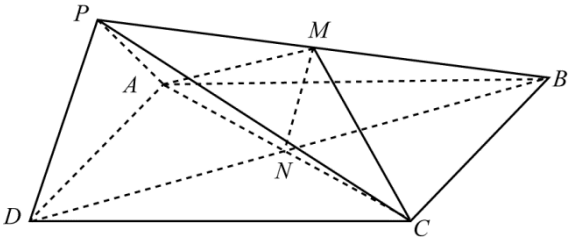
$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$=6\sqrt{3}$

16、

（1） 取AC、BD交点为N.连结MN.



$\because PD//$面MAC

$PD\subset$面PBD

面$PBD\cap$面$MAC=MN$

$\therefore PD//MN$

在$\triangle PBD$中，N为BD中点

$\therefore M$为PB中点

(2) 方法一：

取AD中点为O，BC中点为E，连结OP,OE

$\because PA=PD\therefore PO\perp AD$

又$\because$面$PAD\perp$面$ABCD$

面$PAD\cap$面$ABCD=AD$

$\therefore PO\perp$面$ABCD$

以OD为x轴，OE为y轴，OP为z轴建立空间直角坐标系

可知$D(2,0,0)$，$A(-2,0,0)$，$B(-2,4,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$

易知面PDA的法向量为$\vec{m}=(0,1,0)$

且$\overrightarrow{PD}=(2,0,-\sqrt{2}),\overrightarrow{PB}=(-2,4,-\sqrt{2})$

设面PBD的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

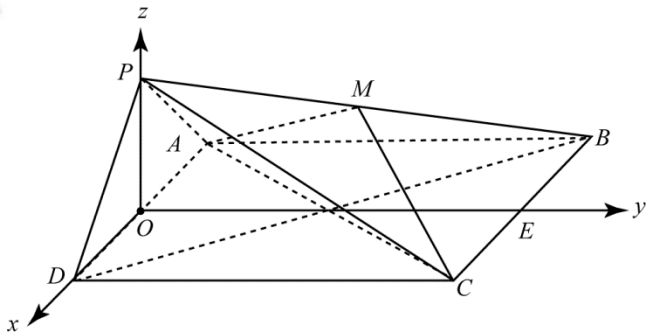
$$\begin{cases}2x-\sqrt{2}z=0\\-2x+4y-\sqrt{2}z=0\end{cases}$$

可知$\vec{n}=(1,1,\sqrt{2})$

$$\therefore\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{1^2}\times\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}\right|=\frac{1}{2}$$

由图可知二面角的平面角为锐角

$\therefore$二面角$B-PD-A$大小为$60°$



方法二：

过点A作$AH\perp PD$，交PD于点E，连结BE

$\because BA\perp$平面$PAD,\therefore PD\perp BA,$

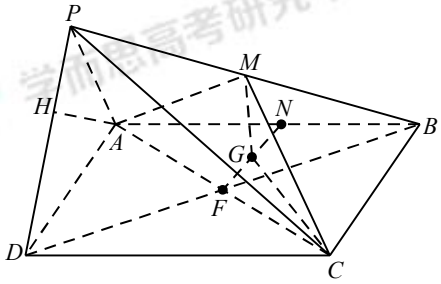
$\therefore PD\perp$平面$BAH,\therefore PD\perp BH$，

$\therefore\angle AEB$即为二面角$B-PD-A$的平面角

$AD\cdot PO=AE\cdot PD$，可求得$AE=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$$\tan\angle AEB=\frac{4}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$$

$\therefore\angle AEB=60°$



(3) 方法一：

点$M\left(-1,2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$C(2,4,0)$

$\therefore \overrightarrow{MC}=\left(3,2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

由（2）题面BDP的一个法向量$\vec{n}=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$

设MC与平面BDP所成角为θ

$$\therefore \sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{MC},\vec{n}>\right|=\left|\frac{3+2-1}{\sqrt{9+4+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}\right|=\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

方法二：

记$AC\cap BD=F$，取AB中点N，连结MN，FN，MF

取FN中点G，连MG，易证点G是FN中点，$\therefore MG\,//\,PO$

$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PO\perp AD$，

$\therefore PO\perp$平面$ABCD$

$\therefore MG\perp$平面$ABCD$

连结GC，$GC=\sqrt{13}$，$MG=\frac{1}{2}PO=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore MC=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\because PD=\sqrt{6}$，$BD=4\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{22}$，由余弦定理知$\cos\angle PDB=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin\angle PDB=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore S_{\Delta PDB}=\frac{1}{2}PD\cdot DB\cdot\sin\angle PDB=4\sqrt{2}$

设点C到平面PDB的距离为h，

$V_{P\text{-}DBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta PDB}\cdot h$

又$V_{P\text{-}DBC}=V_{C\text{-}PDB}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot PO$，求得$h=2$

记直线MC与平面BDP所成角为θ

$$\therefore \sin\theta=\frac{h}{|MC|}=\frac{2}{\frac{3\sqrt{6}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

17.

【解析】(1) 50 名服药者中指标y的值小于 60 的人有 15 人，故随机抽取 1 人，此人指标y的值小于 60 的概率为$\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$

（2）ξ的可能取值为：0，1，2

$$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6},\quad P(\xi=1)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_4^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$$

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(\xi)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$

（3）从图中服药者和未服药者指标y数据的离散程度观察可知，服药者的方差大。

18.

【解析】(1) 由抛物线$y^2=2px$过点$(1,1)$，代入原方程得$1^2=2p\times1$，

所以$p=\frac{1}{2}$，原方程为$y^2=x$.

由此得抛物线焦点为$\left(\frac{1}{4},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{1}{4}$.

（2）

法一：

$\because BM\perp x$轴

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$A(x_1,y_A),B(x_1,y_B)$，根据题意显然有$x_1\neq0$

若要证A为BM中点

只需证$2y_A=y_B+y_M$即可，左右同除x_1有$\frac{2y_A}{x_1}=\frac{y_B}{x_1}+\frac{y_M}{x_1}$

即只需证明$2k_{OA}=k_{OB}+k_{OM}$成立

其中$k_{OA}=k_{OP}=1,k_{OB}=k_{ON}$

当直线MN斜率不存在或斜率为零时，显然与抛物线只有一个交点不满足题意，所以直线MN斜率存在且不为零.

设直线MN：$y=kx+\frac{1}{2}(k\neq0)$

联立$\begin{cases}y=kx+\frac{1}{2}\\y^2=x\end{cases}$有$k^2x^2+(k-1)x+\frac{1}{4}=0$，

考虑$\Delta=(k-1)^2-4\times\frac{1}{4}\times k^2=1-2k$，由题可知有两交点，所以判别式大于零，所以$k<\frac{1}{2}$.

由韦达定理可知：$x_1+x_2=\frac{1-k}{k^2}$……①，$x_1x_2=\frac{1}{4k^2}$……②

$k_{OB}+k_{OM}=k_{ON}+k_{OM}=\frac{y_2}{x_2}+\frac{y_1}{x_1}$

$=\frac{kx_2+\frac{1}{2}}{x_2}+\frac{kx_1+\frac{1}{2}}{x_1}=2k+\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$

将①②代入上式，有 $2k+\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}=2k+\frac{\frac{1-k}{k^2}}{2\times\frac{1}{4k^2}}=2k+2(1-k)=2$

即 $k_{ON}+k_{OM}=k_{OB}+k_{OM}=2=2k_{OA}$，所以 $2y_A=y_B+y_M$ 恒成立

$\therefore A$ 为 BM 中点，得证.

法二：

当直线 MN 斜率不存在或斜率为零时，显然与抛物线只有一个交点不满足题意，所以直线 MN 斜率存在且不为零.

设 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 为点 Q，过 Q 的直线 MN 方程为 $y=kx+\frac{1}{2}(k\neq 0)$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，显然，x_1,x_2 均不为零.

联立方程 $\begin{cases}y^2=x\\ y=kx+\frac{1}{2}\end{cases}$ 得 $k^2x^2+(k-1)x+\frac{1}{4}=0$，

考虑 $\Delta=(k-1)^2-4\times\frac{1}{4}\times k^2=1-2k$，由题可知有两交点，所以判别式大于零，所以 $k<\frac{1}{2}$.

由韦达定理可知：$x_1+x_2=\frac{1-k}{k^2}$……①，　$x_1x_2=\frac{1}{4k^2}$……②

由题可得 A,B 横坐标相等且同为 x_1，且 $l_{ON}:y=\frac{y_2}{x_2}x$，$B$ 在直线 ON 上，

又 A 在直线 OP：$y=x$ 上，所以 $A(x_1,x_1),B\left(x_1,\frac{x_1y_2}{x_2}\right)$，若要证明 A 为 BM 中点，

只需证 $2y_A=y_B+y_M$，即证 $\frac{x_1y_2}{x_2}+y_1=2x_1$，即证 $x_1y_2+x_2y_1=2x_1x_2$，

将$\begin{cases} y_1 = kx_1 + \dfrac{1}{2} \\ y_2 = kx_2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$代入上式，

即证$(kx_2 + \frac{1}{2})x_1 + (kx_1 + \frac{1}{2})x_2 = 2x_1x_2$，即$(2k-2)x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 0$，

将①②代入得$(2k-2)\frac{1}{4k^2} + \frac{1-k}{2k^2} = 0$，化简有$\frac{k-1}{2k^2} + \frac{1-k}{2k^2} = 0$恒成立，

所以$2y_A = y_B + y_M$恒成立，

所以A为BM中点.

19.

【解析】 (1) $\because f(x) = e^x \cos x - x$

$\therefore f(0) = 1, f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x - 1 = e^x(\cos x - \sin x) - 1$

$\therefore f'(0) = e^0(\cos 0 - \sin 0) - 1 = 0$

$\therefore f(x)$在$(0, f(0))$处的切线方程为$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$，即$y - 1 = 0$.

(2)令$g(x) = f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) - 1$

$g'(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x$

$\because x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x) = -2e^x \sin x < 0$

$\therefore g(x)$在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$上单调递减

$\therefore x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$时，$g(x) < g(0) = f'(0) = 0$，即$f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$上单调递减

$\therefore x = 0$时，$f(x)$有最大值$f(0) = 1$；

$x = \frac{\pi}{2}$时，$f(x)$有最小值$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

20.（1）易知$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$且$b_1 = 1$，$b_2 = 3$，$b_3 = 5$.

$\therefore c_1=b_1-a_1=0$，

$c_2=\max\{b_1-2a_1，b_2-2a_2\}=\max\{-1，-1\}=-1$，

$c_3=\max\{b_1-3a_1，b_2-3a_2，b_3-3a_3\}=\max\{-2，-3，-4\}=-2$.

下面我们证明，对$\forall n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 2$，都有$c_n=b_1-a_1\cdot n$.

当$k\in\mathbf{N}^*$且$2\leqslant k\leqslant n$时，

$(b_k-a_k\cdot n)-(b_1-a_1\cdot n)$

$=\left[(2k-1)-nk\right]-1+n$

$=(2k-2)-n(k-1)$

$=(k-1)(2-n)$

$\because k-1>0$且$2-n\leqslant 0$，

$\therefore (b_k-a_k\cdot n)-(b_1-a_1\cdot n)\leqslant 0\Rightarrow b_1-a_1\cdot n\geqslant b_k-a_k\cdot n$.

因此，对$\forall n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 2$，$c_n=b_1-a_1\cdot n=1-n$，则$c_{n+1}-c_n=-1$.

又$\because c_2-c_1=-1$，

故$c_{n+1}-c_n=-1$对$\forall n\in\mathbf{N}^*$均成立，从而$\{c_n\}$为等差数列.

（2）设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的公差分别为d_a，d_b，下面我们考虑c_n的取值.

对$b_1-a_1\cdot n$，$b_2-a_2\cdot n$，…，$b_n-a_n\cdot n$，

考虑其中任意项$b_i-a_i\cdot n$（$i\in\mathbf{N}^*$且$1\leqslant i\leqslant n$），

$b_i-a_i\cdot n$

$=\left[b_i+(i-1)d_b\right]-\left[a_1+(i-1)d_a\right]\cdot n$

$=(b_1-a_1\cdot n)+(i-1)(d_b-d_a\cdot n)$

下面我们分$d_a=0$，$d_a>0$，$d_a<0$三种情况进行讨论.

（1）若$d_a=0$，则$b_i-a_i\cdot n=(b_1-a_1\cdot n)+(i-1)\cdot d_b$

①若$d_b\leqslant 0$，则$(b_i-a_i\cdot n)-(b_1-a_1\cdot n)=(i-1)\cdot d_b\leqslant 0$

则对于给定的正整数n而言，$c_n=b_1-a_1\cdot n$

此时$c_{n+1}-c_n=-a_1$，故$\{c_n\}$为等差数列.

②若$d_b>0$，则$(b_i-a_i\cdot n)-(b_n-a_n\cdot n)=(i-n)\cdot d_b\leqslant 0$

则对于给定的正整数n而言，$c_n=b_n-a_n\cdot n=b_n-a_1\cdot n$.

此时$c_{n+1}-c_n=d_b-a_1$，故$\{c_n\}$为等差数列.

此时取$m=1$，则c_1，c_2，c_3，…是等差数列，命题成立.

（2）若$d_a>0$，则此时$-d_a\cdot n+d_b$为一个关于n的一次项系数为负数的一次函数.

故必存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得当$n\geqslant m$时，$-d_a\cdot n+d_b<0$

则当$n\geqslant m$时，$(b_i-a_i\cdot n)-(b_1-a_1\cdot n)=(i-1)(-d_a\cdot n+d_b)\leqslant 0$（$i\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant i\leqslant n$）.

因此，当$n\geqslant m$时，$c_n=b_1-a_1\cdot n$.

此时$c_{n+1}-c_n=-a_1$，故$\{c_n\}$从第m项开始为等差数列，命题成立.

（3）若$d_a<0$，则此时$-d_a\cdot n+d_b$为一个关于n的一次项系数为正数的一次函数.

故必存在$s\in\mathbf{N}^*$，使得当$n\geqslant s$时，$-d_a\cdot n+d_b>0$

则当$n\geqslant s$时，$(b_i-a_i\cdot n)-(b_n-a_n\cdot n)=(i-n)(-d_a\cdot n+d_b)\leqslant 0$（$i\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant i\leqslant n$）

因此，当$n\geqslant s$时，$c_n=b_n-a_n\cdot n$.

此时$\dfrac{c_n}{n}$

$=\dfrac{b_n-a_n\cdot n}{n}$

$=-a_n+\dfrac{b_n}{n}$

$=-d_a\cdot n+(d_a-a_1+d_b)+\dfrac{b_1-d_b}{n}$

令$-d_a=A>0$，$d_a-a_1+d_b=B$，$b_1-d_b=C$

下面证明$\dfrac{c_n}{n}=An+B+\dfrac{C}{n}$对任意正数$M$，存在正整数$m$，使得当$n\geqslant m$时，$\dfrac{c_n}{n}>M$.

①若$C\geqslant 0$，则取$m=\left[\dfrac{|M-B|}{A}\right]+1$（$[x]$表示不大于$x$的最大整数）

当 $n \geqslant m$ 时，

$$\frac{c_n}{n} \geqslant An+B \geqslant Am+B = A\left(\left[\frac{|M-B|}{A}\right]+1\right)+B > A\cdot\frac{M-B}{A}+B = M,$$

此时命题成立.

②若 $C<0$，则取 $m=\left[\frac{|M-C-B|}{A}\right]+1$

当 $n \geqslant m$ 时，

$$\frac{c_n}{n} \geqslant An+B+C \geqslant Am+B+C > A\cdot\frac{|M-C-B|}{A}+B+C \geqslant M-C-B+B+C = M.$$

此时命题也成立.

因此，对任意正数 M，存在正整数 m，使得当 $n \geqslant m$ 时，$\frac{c_n}{n} > M$.

综合以上三种情况，命题得证.