2017 年高考全国Ⅲ卷数学（文科）参考答案与解析

学而思高考研究中心

1．B

【解析】$A\cap B=\{2,4\}$，$\therefore A\cap B$ 中有两个元素．

2．C

【解析】$z=-2i-1$，第三象限．

3．A

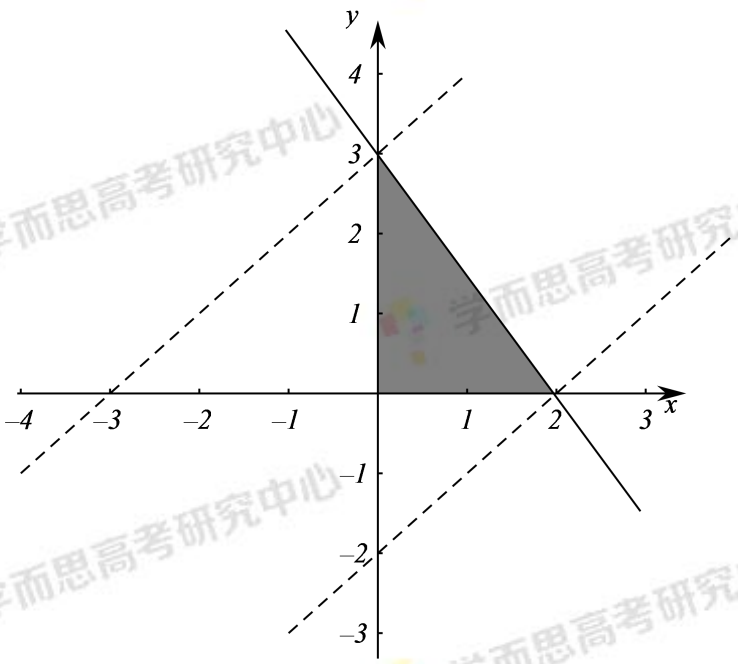
4．A

【解析】$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{16}{9}$

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{7}{9}$．

5．B

【解析】当 $y=x-z$ 过 $(0,3)$ 时，z 取最小值 -3．当 $y=x-z$ 过 $(2,0)$ 时，z 取最大值 2．



6．A

【解析】

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{1}{5}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{1}{5}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\frac{6}{5}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\&\leqslant\frac{6}{5}\end{aligned}$$

7．D

【解析】设函数 $f(x)=x+\dfrac{\sin x}{x^2}$，为奇函数，而原函数为 $g(x)=f(x)+1$，

即关于 $(0,1)$ 对称，故选 D.

8．D

【解析】程序运行过程如下表所示：

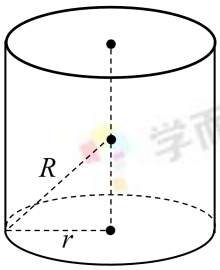
	S	M	t
初始状态	0	100	1
第 1 次循环结束	100	-10	2
第 2 次循环结束	90	1	3

此时 $S=90<91$ 首次满足条件，程序需在 $t=3$ 时跳出循环，即 $N=2$ 为满足条件的最小值，故选 D.

9．B

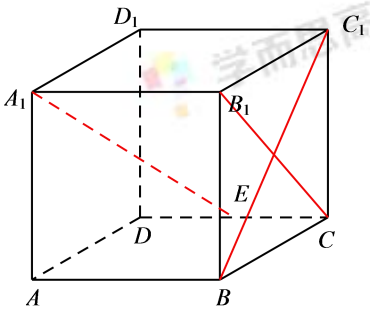
【解析】由题可知球心在圆柱体中心，圆柱体上下底面圆半径 $r=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则圆柱体体积 $V=\pi r^2 h=\dfrac{3\pi}{4}$，故选 B.



10．C

【解析】由图可知 $BC_1\perp B_1C, BC_1\perp A_1B_1, A_1B_1\cap B_1C=B_1$，由此可知 $BC_1\perp$ 面 A_1B_1CE，由此 $A_1E\perp BC_1$



11．A

【解析】∵以 A_1A_2 为直径为圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，

∴圆心到直线距离 d 等于半径，

$\therefore d=\dfrac{|2ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$

又∵ $a>0,b>0$，则上式可化简为 $a^2=3b^2$

∵ $b^2=a^2-c^2$，可得 $a^2=3\left(a^2-c^2\right)$，即 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{3}$

∴ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故选 A

12．C

【解析】由条件，$f(x)=x^2-2x+a(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1})$，得：

$$\begin{aligned}f(2-x)&=(2-x)^2-2(2-x)+a(\mathrm{e}^{2-x-1}+\mathrm{e}^{-(2-x)+1})\\&=x^2-4x+4-4+2x+a(\mathrm{e}^{1-x}+\mathrm{e}^{x-1})\\&=x^2-2x+a(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1})\end{aligned}$$

∴ $f(2-x)=f(x)$，即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的对称轴，

由题意，$f(x)$ 有唯一零点，

∴ $f(x)$ 的零点只能为 $x=1$，

即 $f(1)=1^2-2\cdot1+a(\mathrm{e}^{1-1}+\mathrm{e}^{-1+1})=0$，

解得 $a=\frac{1}{2}$.

13．2

【解析】$\vec{a}\perp\vec{b}$

∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6+3m=0$，得 $m=2$

14．5

【解析】$\frac{3}{a}=\frac{3}{5}$，∴ $a=5$

15．75°

【解析】$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$

∴ $\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{\sqrt{6}\sin 60^\circ}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $\angle B=45^\circ$

∴ $\angle A=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$

16．$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

【解析】显然，$f(x)$ 单调递增

令 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

∵ $g(0)=\frac{3}{2}>1$

∴ $x\geqslant 0$ 时，$g(x)>1$

当 $x<0$ 时，$g(x)=(x+1)+\left(x+\frac{1}{2}\right)=2x+\frac{3}{2}$

令 $g(x)>1$，得 $x>-\frac{1}{4}$

综上，$x\in\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

17.

【解析】(1) 由题设有 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$，

$a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n+(2n+1)a_{n+1}=2(n+1)$，

上面两式相减，得 $(2n+1)a_{n+1}=2$，$a_{n+1}=\frac{2}{2n+1}$。

所以，$n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{2}{2n-1}$

当 $n=1$ 时，$a_1=2$，符合 $a_n=\frac{2}{2n-1}$，

因此，$a_n=\frac{2}{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$。

(2) 设 $b_n=\frac{a_n}{2n+1}$，则 $b_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，

于是，

$b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$，

即数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{2n}{2n+1}$。

18.

【解析】(1)设六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶为事件 A，

则 $P(A)=\frac{2+16+36}{90}=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$。

(2) 气温低于20，需求量为200，利润 $Y=200\cdot 2+250\cdot(-2)=-100$；

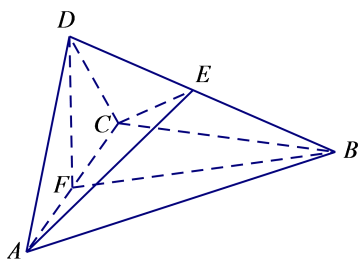
气温位于 $[20,25)$，需求量为300，利润 $Y=300\cdot 2+150\cdot(-2)=300$；

气温不低于25，需求量为500，利润 $Y=450\cdot 2=900$。

$P(Y>0)=\frac{36+25+7+4}{90}=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$。

19.

【解析】(1)取 AC 中点 F，连接 DF，BF



因为 $AD=CD$，F 为 AC 中点，

所以 $DF\perp AC$.

同理，$BF\perp AC$.

因为 $DF\cap BF=F$，所以 $AC\perp$ 面 BDF.

因为 $DB\subset$ 面 BDF，所以 $AC\perp BD$.

(2) 设 $AB=BC=CA=2$，

因为 $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，所以 $AD=CD=\sqrt{2}$．

因为 $\triangle BCD\cong\triangle BAD$，所以 $AE=CE$．

又 $AE\perp CE$，所以 $AE=CE=\sqrt{2}$，于是 $CE=CD$．

在等腰三角形 BCD 中，

因为 $\triangle CDE$ 也是等腰三角形，且两个三角形的底角相等，

所以 $\triangle CDE\backsim\triangle BCD$．

设 $DE=x$，则 $\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $x=1$，即 E 是 BD 的中点．

于是 $\dfrac{V_{B-ACE}}{V_{D-ACE}}=\dfrac{BE}{ED}=1$．

20.

【解析】(1) 设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，x_1,x_2 是方程 $x^2+mx-2=0$ 的两个根，

由韦达定理得，$x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=-2$．

因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(-x_1,1)\cdot(-x_2,1)=x_1x_2+1=-1$，

所以不可能有 $AC\perp BC$．

(2)设圆心为 (a,b)，半径为 r，则 $a=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{m}{2}$，

$$r^2=b^2+\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=b^2+\frac{|x_1-x_2|^2}{4}=b^2+\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{4}=b^2+\frac{m^2+8}{4},$$

所以圆的方程为 $\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2+(y-b)^2=b^2+\dfrac{m^2+8}{4}$．

因为圆过点 $(0,1)$，所以 $\dfrac{m^2}{4}+(1-b)^2=b^2+\dfrac{m^2+8}{4}$，解得 $b=-\dfrac{1}{2}$．

因此，圆的方程为 $\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{m^2+9}{4}$．

令 $x=0$，得 $\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$，解得 $y=1,-2$．

所以，过 A,B,C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为 3．

21.

【解析】(1) $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$，$x>0$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax+(2a+1)=\dfrac{2ax^2+(2a+1)x+1}{x}=\dfrac{(2ax+1)(x+1)}{x}$．

$a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2a}$，当 $0<x<-\dfrac{1}{2a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>-\dfrac{1}{2a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减．

综上，$a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减．

(2)由(1)知，$a<0$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(-\dfrac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\dfrac{1}{2a}\right)-1-\dfrac{1}{4a}$

只需证 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1-\frac{1}{4a}\leqslant-\frac{3}{4a}-2$，即 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)+1+\frac{1}{2a}\leqslant 0$．

令 $t=-\frac{1}{2a}$，则 $t>0$，问题等价于证明 $\ln t+1-t\leqslant 0$．

设 $g(t)=\ln t+1-t$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$，令 $g'(t)=0$，得 $t=1$

当 $0<t<1$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增；

当 $t>1$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减．

所以，$g(t)_{\max}=g(1)=\ln 1+1-1=0$．

因此，$\ln t+1-t\leqslant 0$ 成立．

从而，$\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)+1+\frac{1}{2a}\leqslant 0$ 成立．

于是，$f(x)\leqslant-\frac{3}{4a}-2$．

22．

【解析】(1)将参数方程转化为一般方程

$l_1: y=k(x-2)$ .....①

$l_2: y=\frac{1}{k}(x+2)$ .....②

①×②消 k 可得：$x^2-y^2=4$

即 P 的轨迹方程为 $x^2-y^2=4$，$y\neq 0$；

(2)将参数方程转化为一般方程

$l_3: x+y-\sqrt{2}=0$ .....③

联立曲线 C 和 l_3 $\begin{cases}x+y-\sqrt{2}=0\\x^2-y^2=4\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\\y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 解得 $\rho=\sqrt{5}$

即 M 的极半径是 $\sqrt{5}$．

23．

【解析】(1) $f(x)=|x+1|-|x-2|$ 可等价为 $f(x)=\begin{cases}-3, x\leqslant -1\\2x-1, -1<x<2\\3, x\geqslant 2\end{cases}$．由 $f(x)\geqslant 1$ 可得：

①当 $x\leqslant -1$ 时显然不满足题意；

②当 $-1<x<2$ 时，$2x-1\geqslant 1$，解得 $x\geqslant 1$；

③当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=3\geqslant 1$ 恒成立．综上，$f(x)\geq 1$ 的解集为 $\{x|x\geqslant 1\}$．

(2)不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 等价为 $f(x)-x^2+x\geqslant m$，

令 $g(x)=f(x)-x^2+x$，则 $g(x)\geqslant m$ 解集非空只需要 $[g(x)]_{\max}\geqslant m$．

而 $g(x)=\begin{cases}-x^2+x-3, x\leqslant -1\\ -x^2+3x-1, -1<x<2\\ -x^2+x+3, x\geqslant 2\end{cases}$.

①当 $x\leqslant -1$ 时，$[g(x)]_{\max}=g(-1)=-3-1-1=-5$；

②当 $-1<x<2$ 时，$[g(x)]_{\max}=g\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}-1=\frac{5}{4}$；

③当 $x\geqslant 2$ 时，$[g(x)]_{\max}=g(2)=-2^2+2+3=1$.

综上，$[g(x)]_{\max}=\frac{5}{4}$，故 $m\leqslant\frac{5}{4}$.