练习三

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid 2^x>1\}$，$B=\{x\mid x<1\}$，则 $A\bigcap B=$ （　　）

A. $\{x\mid 0<x<1\}$　　B. $\{x\mid x>0\}$　　C. $\{x\mid x>1\}$　　D. $\{x\mid x<1\}$

2. 设 i 是虚数单位，$\overline{z}$ 是复数 z 的共轭复数.若复数 z 满足 $(2-5i)\overline{z}=29$，则 $z=$（　　）

A. $2+5i$　　B. $2-5i$　　C. $-2+5i$　　D. $-2-5i$

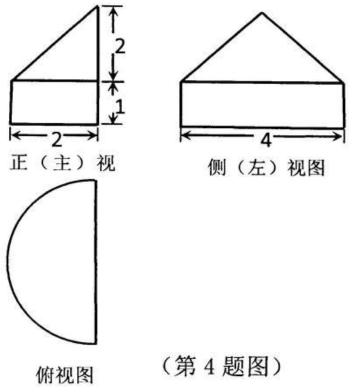
3. 已知命题 p：“存在 $x_0\in[1,+\infty)$，使得 $(\log_2 3)^{x_0}\ge 1$”，则下列说法正确的是（　　）

A. p 是假命题；$\neg p$:“任意 $x\in[1,+\infty)$，都有 $(\log_2 3)^x<1$”

B. p 是真命题；$\neg p$:“不存在 $x_0\in[1,+\infty)$，使得 $(\log_2 3)^{x_0}<1$”

C. p 是真命题；$\neg p$:“任意 $x\in[1,+\infty)$，都有 $(\log_2 3)^x<1$”

D. p 是假命题；$\neg p$:“任意 $x\in(-\infty,1)$，都有 $(\log_2 3)^x<1$”



（第 4 题图）

4. 某几何体的三视图如图所示，其俯视图是由一个半圆与其直径组成的图形，则此几何体的体积是（　　）

A. $\dfrac{20}{3}\pi$　　B. 6π　　C. $\dfrac{10}{3}\pi$　　D. $\dfrac{16}{3}\pi$

5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=72$，则 $a_2+a_4+a_9=$（　　）

A. 8　　B. 16　　C. 24　　D. 36

6. 已知点 $P(x,y)$ 是抛物线 $y^2=4x$ 上任意一点，Q 是圆 $C:(x+2)^2+(y-4)^2=1$ 上任意一点，则 $|\overrightarrow{PQ}|+x$ 的最小值为（　）

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

7. 若在 $(3x^2-\dfrac{1}{2x^3})^n$ 的展开式中含有常数项，则正整数 n 取得最小值时的常数项为（　　）

A. $-\dfrac{135}{2}$　　B. -135　　C. $\dfrac{135}{2}$　　D. 135

8. 若实数 x、y 满足不等式组 $\begin{cases}x+3y-3\ge 0,\\ 2x-y-3\le 0,\\ x-my+1\ge 0,\end{cases}$，且 x+y 的最大值为 9，则实数 m=（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

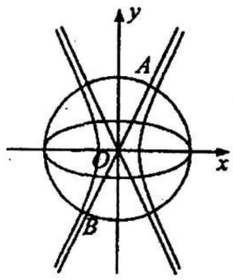
9. 已知偶函数 $y=f(x),x\in R$ 满足：$f(x)=x^2-3x(x\ge 0)$，若函数 $g(x)=\begin{cases}\log_2 x,x>0\\ -\dfrac{1}{x},x<0\end{cases}$，则 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数为（　　）

A. 1　　B. 3　　C. 2　　D. 4

10. 已知实数 m,n，若 $m\ge 0,n\ge 0$，且 $m+n=1$，则 $\dfrac{m^2}{m+2}+\dfrac{n^2}{n+1}$ 的最小值为(　　)

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{4}{15}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

11. 如图，已知椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{11}+y^2=1$，双曲线 C_2：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），若以 C_1 的长轴为直径的圆与 C_2 的一条渐近线交于 A、B 两点，且 C_1 与该渐近线的两交点将线段 AB 三等分，则 C_2 的离心率为（　　）

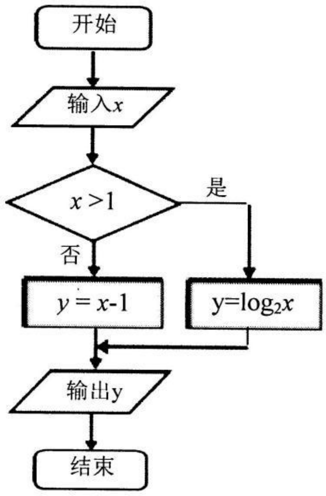


A. $\sqrt{5}$　　B. 5　　C. $\sqrt{17}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项，其中，$a_1=a_9=1$，且对每个 $i\in\{1,2,\ldots,8\}$，均有 $\dfrac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2,1,-\dfrac{1}{2}\right\}$，则数列 $\{a_n\}$ 的个数为(　　)

A. 729　　B. 491　　C. 490　　D. 243

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.



13. 执行右面的程序框图，若输出的结果为 $\dfrac{1}{2}$，则输入的实数 x 的值是___________.

14. 若随机变量 $\xi\sim N(2,1)$，且 $P(\xi>3)=0.1587$，

则 $P(\xi>1)=$__________.

15. 已知四面体 P-ABC，其中△ABC 是边长为 6 的等边三角形，PA⊥平面 ABC，PA=4，则四面体 P-ABC 外接球的表面积为________.

16. 对于函数 $f(x)$，若存在常数 $a\neq 0$，使得 x 取定义域内的每一个值，

都有 $f(x)=-f(2a-x)$，则称 $f(x)$ 为准奇函数.给定下列函数：① $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$；

② $f(x)=(x-1)^2$；③ $f(x)=x^3$；④ $f(x)=\cos x$，

其中所有准奇函数的序号是__________.

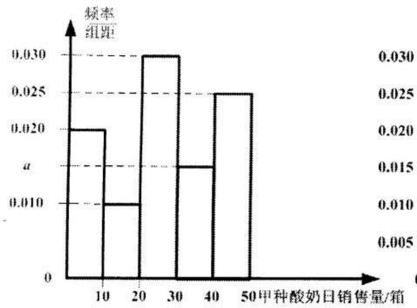
三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.在ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，向量 $\vec{m}=(a+b,\sin A-\sin C)$，向量 $\vec{n}=(c,\sin A-\sin B)$，且 $\vec{m}//\vec{n}$；

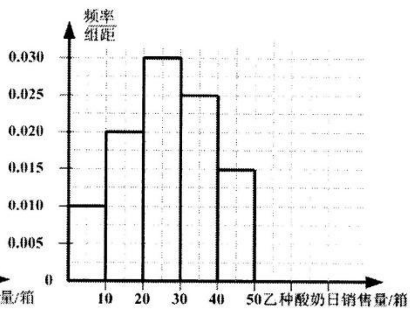
（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）设 BC 中点为 D，且 $AD=\sqrt{3}$；求 $a+2c$ 的最大值及此时ΔABC 的面积。

18.某超市从 2014 年甲、乙两种酸奶的日销售量（单位：箱）的数据中分别随机抽取 100 个，并按[0，10]，(10，20]，(20，30]，(30，40]，(40，50]分组，得到频率分布直方图如下：



（甲）



（乙）

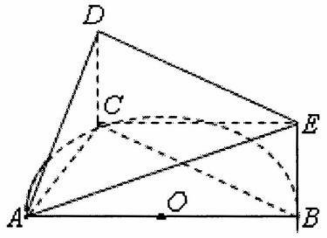
假设甲、乙两种酸奶独立销售且日销售量相互独立．

（Ⅰ）写出频率分布直方图（甲）中的 a 的值；记甲种酸奶与乙种酸奶日销售量（单位：箱）的方差分别为 s_1^2，s_2^2，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小；（只需写出结论.）

（Ⅱ）估计在未来的某一天里，甲、乙两种酸奶的销售量恰有一个高于 20 箱且另一个不高于 20 箱的概率；

（Ⅲ）设 X 表示在未来 3 天内甲种酸奶的日销售量不高于 20 箱的天数，以日销售量落入各组的频率作为概率，求 X 的数学期望．

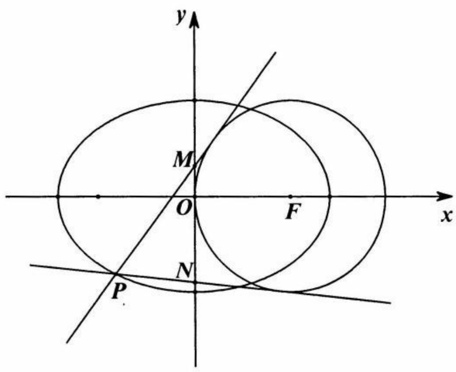
19．如图，AB 是半圆 O 的直径，C 是半圆 O 上除 A、B 外的一个动点，DC 垂直于半圆 O 所在的平面， DC∥EB，DC=EB，AB=4，$\tan\angle EAB=\frac{1}{4}$．



⑴证明：平面 ADE⊥平面 ACD；

⑵当三棱锥 C-ADE 体积最大时，求二面角 D-AE-B 的余弦值．

20．已知离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点 F 是圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心，过椭圆上的动点 P 作圆的两条切线分别交 y 轴于 M,N(与 P 点不重合)两点



(1)求椭圆方程；

(2)求线段 MN 长的最大值，并求此时点 P 的坐标。

21. 已知函数 $f(x)=\ln x-mx+m$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)\le 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，对任意的 $0<a<b$，求证：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{1}{a(a+1)}$.

22. 选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2-t\\ y=2-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l 与曲线 $C:(y-2)^2-x^2=1$ 交于 A,B 两点.

（1）求|AB|的长；

（2）在以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，设点 P 的极坐标为 $(2\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4})$，求点 P 到线段 AB 中点 M 的距离.

23. 选修 4—5：不等式选讲

已知实数 a,b,c 满足 $a>0,b>0,c>0$，且 $abc=1$.

（Ⅰ）证明：$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8$；

（Ⅱ）证明：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

练习三

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	C	C	C	C	A	B	A	A	B

（13）$\sqrt{2}$　　（14）0.8413　　（15）64π　　（16）①④

17. 解：（Ⅰ）因为$\vec{m}//\vec{n}$，故有$(a+b)(\sin A-\sin B)-c(\sin A-\sin C)=0$

由正弦定理可得$(a+b)(a-b)-c(a-c)=0$，即$a^2+c^2-b^2=ac$

由余弦定理可知$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$……..5 分

（Ⅱ）设$\angle BAD=\theta$，则在ΔBAD中，由$B=\dfrac{\pi}{3}$可知$\theta\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，

由正弦定理及$AD=\sqrt{3}$有$\dfrac{BD}{\sin\theta}=\dfrac{AB}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}=\dfrac{AD}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$；

所以$BD=2\sin\theta, AB=2\sin(\dfrac{2\pi}{3}-\theta)=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$，………..7 分

所以$a=2BD=4\sin\theta, c=AB=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$

从而$a+2c=2\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta=4\sqrt{3}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})$………..8 分

由$\theta\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$可知$\theta+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，所以当$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，

即$\theta=\dfrac{\pi}{3}$时，$a+2c$的最大值为$4\sqrt{3}$；………..10 分

此时$a=2\sqrt{3}, c=\sqrt{3}$，所以$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$…………12 分

18. 解：（Ⅰ）$a=0.015$；　　$s_1^2>s_2^2$.　　………………3 分

（Ⅱ）设事件A：在未来的某一天里，甲种酸奶的销售量不高于 20 箱；

事件B：在未来的某一天里，乙种酸奶的销售量不高于 20 箱；

事件C：在未来的某一天里，甲、乙两种酸奶的销售量恰好一个高于 20 箱且另一个不高于 20 箱.

则$P(A)=0.20+0.10=0.3$，$P(B)=0.10+0.20=0.3$.

所以$P(C)=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=0.42$.　　………………6 分

（Ⅲ）由题意可知，X的可能取值为 0，1，2，3.　　………………7 分

$P(X=0)=C_3^0\times0.3^0\times0.7^3=0.343$，　$P(X=1)=C_3^1\times0.3^1\times0.7^2=0.441$，

$P(X=2)=C_3^2\times0.3^2\times0.7^1=0.189$，$P(X=3)=C_3^3\times0.3^3\times0.7^0=0.027$.

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.343	0.441	0.189	0.027

所以 X 的数学期望 $EX=0\times0.343+1\times0.441+2\times0.189+3\times0.027=0.9$....12 分

另解：由题意可知 $X\sim B(3,0.3)$.

所以 X 的数学期望 $EX=3\times0.3=0.9$. ....12 分

19. 解：（Ⅰ）证明：因为 AB 是直径，所以 $BC\perp AC$

因为 $CD\perp$ 平面 ABC，所以 $CD\perp BC$ ，

因为 $CD\cap AC=C$，所以 $BC\perp$ 平面 ACD

因为 $CD\,//\,BE$， $CD=BE$，所以 $BCDE$ 是平行四边形，

$BC\,//\,DE$，所以 $DE\perp$ 平面 ACD

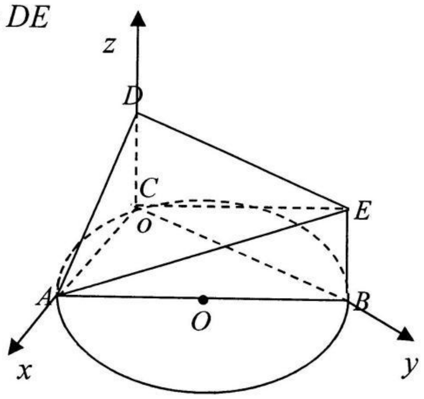
因为 $DE\subset$ 平面 ADE，所以平面 $ADE\perp$ 平面 ACD ....5 分

（Ⅱ）依题意，$EB=AB\times\tan\angle EAB=4\times\dfrac{1}{4}=1$ ，

由（Ⅰ）知 $V_{C-ADE}=V_{E-ACD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\Delta ACD}\times DE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AC\times CD\times DE$

$=\dfrac{1}{6}\times AC\times BC\le\dfrac{1}{12}\times(AC^2+BC^2)=\dfrac{1}{12}\times AB^2=\dfrac{4}{3}$，

当且仅当 $AC=BC=2\sqrt{2}$ 时等号成立 ....7 分



如图所示，建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,1)$， $E(0,2\sqrt{2},1)$，

$A(2\sqrt{2},0,0)$ $B(0,2\sqrt{2},0)$，

则 $\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$， $\overrightarrow{BE}=(0,0,1)$，

$\overrightarrow{DE}=(0,2\sqrt{2},0)$， $\overrightarrow{DA}=(2\sqrt{2},0,-1,)$

设面 DAE 的法向量为 $\vec{n_1}=(x,y,z)$， $\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{DA}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2\sqrt{2}y=0\\2\sqrt{2}x-z=0\end{cases}$ $\therefore\vec{n_1}=(1,0,2\sqrt{2})$，

设面 ABE 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$， $\begin{cases}\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0\\\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}z=0\\-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0\end{cases}$ $\therefore\vec{n_2}=(1,1,0)$，

$\therefore\cos\left\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\right\rangle=\dfrac{\vec{n_1}\bullet\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\bullet\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$,可以判断 $\left\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\right\rangle$ 与二面角 $D-AE-B$ 的平面角互补

$\therefore$ 二面角 $D-AE-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$......................12 分

20. 解：(1) 圆心坐标（1，0），所以 c=1，又 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore a=\sqrt{2}$

故 b=1,故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ .... 4 分

(2)设 P（x_0,y_0），$M(0,m)$，$N(0,n)$ $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow x=2-\sqrt{2}\quad x=2+\sqrt{2}$（舍去）

$\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 0$

$g(x) \geq 0$ 对 $x \in (0,+\infty)$ 恒成立，也就是 $m - \ln m - 1 \geq 0$ 对 $m \in (0,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore m - \ln m - 1 = 0$，解 $m = 1$，

$\therefore$若 $f(x) \leq 0$ 在 $x \in (0,+\infty)$ 上恒成立，则 $m = 1$ …………… 8 分

（III）证明：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\ln b - \ln a + a - b}{b-a} = \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} - 1 = \dfrac{\ln \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1} \cdot \dfrac{1}{a} - 1$，

由（II）得 $f(x) \leq 0$ 在 $x \in (0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $\ln x \leq x - 1$，当且仅当 $x = 1$ 时去等号，又由 $0 < a < b$ 得 $\dfrac{b}{a} > 1$，所以有 $0 < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b}{a} - 1$，

即 $\dfrac{\ln \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1} < 1$．则 $\dfrac{\ln \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1} \cdot \dfrac{1}{a} - 1 < \dfrac{1}{a} - 1 = \dfrac{1-a}{a} = \dfrac{1-a^2}{a(1+a)} < \dfrac{1}{a(a+1)}$，

则原不等式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < \dfrac{1}{a(a+1)}$ 成立 …………… 12 分

23.解:（1）直线 l 的参数方程化为标准型 $\begin{cases} x = -2 + \dfrac{1}{2}t \\ y = 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数） …… 2 分

代入曲线 C 方程得 $t^2 + 4t - 10 = 0$

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2，则 $t_1 + t_2 = -4$，$t_1 t_2 = -10$，

所以 $|AB| = |t_1 - t_2| = 2\sqrt{14}$ …… 5 分

（2）由极坐标与直角坐标互化公式得 P 直角坐标 $(-2,2)$， …… 6 分

所以点 P 在直线 l， 中点 M 对应参数为 $\dfrac{t_1 + t_2}{2} = -2$，

由参数 t 几何意义，所以点 P 到线段 AB 中点 M 的距离 $|PM| = 2$ ……10 分

24.(1) $1 + a \geq 2\sqrt{a}, 1 + b \geq 2\sqrt{b}, 1 + c \geq 2\sqrt{c}$，相乘得证————5 分

（2）$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = ab + bc + ac$

$ab + bc \geq 2\sqrt{ab^2c} = 2\sqrt{b}$，$ab + ac \geq 2\sqrt{a^2bc} = 2\sqrt{a}$，$bc + ac \geq 2\sqrt{abc^2} = 2\sqrt{c}$ 相加

得证————10 分

$\therefore x_0 \in [-\sqrt{2},0) \cup (0,2-\sqrt{2})$ ..6 分

直线 PM 的方程 $y-m=\dfrac{y_0-m}{x_0}x \Rightarrow (y_0-m)x-x_0y+mx_0=0$

$\therefore \dfrac{|y_0-m+x_0m|}{\sqrt{(y_0-m)^2+x_0^2}}=1 \Rightarrow (x_0-2)m^2+2y_0m-x_0=0$,同理$(x_0-2)n^2+2y_0n-x_0=0$

∴m,n 是方程$(x_0-2)t^2+2y_0t-x_0=0$两实根

由韦达定理：$m+n=\dfrac{2y_0}{x_0-2}$ $mn=\dfrac{-x_0}{x_0-2}$ 8 分

$|MN|=|m-n|=\sqrt{(m+n)^2-4mn}=\sqrt{\dfrac{4x_0^2+4y_0^2-8x_0}{(x_0-2)^2}}$ $(\because \dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1)$

$=\sqrt{2-\dfrac{4}{(x_0-2)^2}}$ …10 分

令 $f(x)=2-4x^{-2}$ ，$x\in[-4,-2)\cup(-2,-\sqrt{2})$，显然由 f(x)的单调性知 $f(x)_{\max}=2-4\times(2-\sqrt{2}-2)^{-2}$

$\therefore |MN|_{\max}=2\sqrt{\sqrt{2}-1}$，此时 $x_0=-\sqrt{2}$，故 P 点坐标为（$-\sqrt{2},0$），即椭圆左顶点 12 分

21. 解：（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-m=\dfrac{1-mx}{x}(x\in(0,+\infty))$，

当 $m\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

此时函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $m>0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-m=\dfrac{1-mx}{x}>0$，得 $x\in(0,\dfrac{1}{m})$，

由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-m=\dfrac{1-mx}{x}<0$，得 $x\in(\dfrac{1}{m},+\infty)$，

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $x\in(0,\dfrac{1}{m})$，单调递减区间为 $(\dfrac{1}{m},+\infty)$ …………… 4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：当 $m\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$f(1)=0$，显然不成立；

当 $m>0$ 时，$f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{m})=\ln\dfrac{1}{m}-1+m=m-\ln m-1$

只需 $m-\ln m-1\le 0$ 即可， 令 $g(x)=x-\ln x-1$，

则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

得函数 $g(x)$ 在（0,1）上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.