

## 新生综合测试数学试题卷

(满分 120 分, 答题时间 60 分钟)

一、选择题 (下列各题 A、B、C、D 四个选项中, 有且仅有一个是正确的, 每小题 5 分, 共 40 分)

1. 下列结论正确的是 ( )

- A.  $3a^2b - a^2b = 2$       B. 单项式  $-x^2$  的系数是 -1

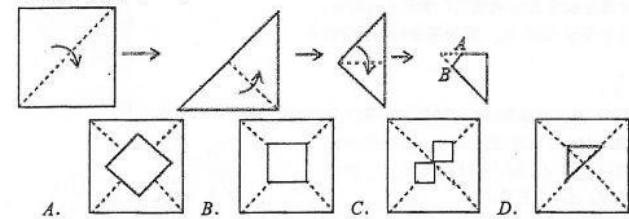
C. 使式子  $\sqrt{x+2}$  有意义的  $x$  的取值范围是  $x > -2$

D. 若分式  $\frac{a^2-1}{a+1}$  的值等于 0, 则  $a = \pm 1$

2. 在下列艺术字中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ( )



3. 如图所示, 将正方形纸片三次对折后, 沿图中 AB 线剪掉一个等腰直角三角形, 展开铺平得到的图形是 ( )



4. 今年, 我省启动了“关爱留守儿童工程”. 某村小为了了解各年级留守儿童的数量, 对一到六年级留守儿童数量进行了统计, 得到每个年级的留守儿童人数分别为 10, 15, 10, 17, 18, 20. 对于这组数据, 下列说法错误的是

- A. 平均数是 15      B. 众数是 10      C. 中位数是 17      D. 方差是  $\frac{44}{3}$

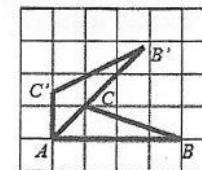
5. 如图, A、B、C 三点在正方形网格线的交点处, 若将  $\triangle ABC$

绕着点 A 逆时针旋转得到  $\triangle AC'B'$  则  $\tan B'$  的值为 ( ) A.  $\frac{1}{2}$

- B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

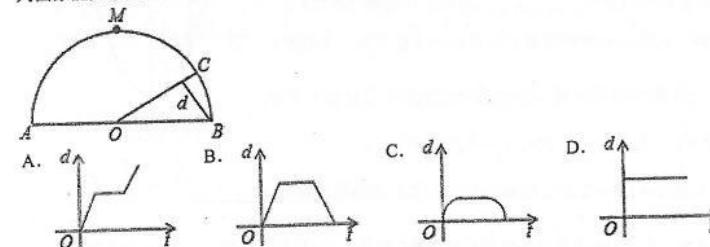
6. 如图是自行车骑行训练场地的一部分, 半圆 O 的直径

$AB=100$ , 在半圆弧上有一运动员 C 从 B 点沿半圆周匀速运动到 M (最高点), 此时由于自行车故障原地停留了一段时间, 修理



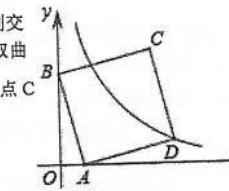
第 5 题图

好继续以相同的速度运动到 A 点停止. 设运动时间为 t, 点 B 到直线 OC 的距离为 d, 则下列图象能大致刻画 d 与 t 之间的关系是 ( )



7. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线  $y = -3x + 3$  与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点, 以 AB 为边在第一象限作正方形 ABCD, 点 D 在双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 上. 将正方形沿 x 轴负方向平移 a 个单位长度后, 点 C 恰好落在该双曲线上, 则 a 的值是 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

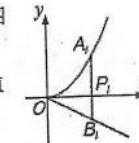


8. 如图, 分别过点  $P_i(i, 0)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 作 x 轴的垂线, 交  $y = \frac{1}{2}x^2$  的图

象于点  $A_i$ , 交直线  $y = -\frac{1}{2}x$  于点  $B_i$ . 则  $\frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{A_2B_2} + \dots + \frac{1}{A_nB_n}$  的值

为 ( )

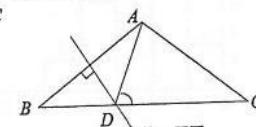
- A.  $\frac{2n}{n+1}$       B. 2      C.  $\frac{2}{n(n+1)}$       D.  $\frac{2}{n+1}$



二、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 答案写在答题卷上)

9. 如图,  $AB=AC$ ,  $\angle BAC=120^\circ$ ,  $AB$  的垂直平分线交  $BC$

于点 D, 那么  $\angle ADC=$  \_\_\_\_\_.



10. 对实数  $a$ 、 $b$  定义新运算“\*”如下:  $a*b = \begin{cases} a & (a \geq b) \\ b & (a < b) \end{cases}$ ,

如  $3*2=3$ ,  $(-\sqrt{5})*\sqrt{2}=\sqrt{2}$ . 若  $x^2+x-1=0$  的两根为

$x_1, x_2$ , 则  $x_1*x_2=$  \_\_\_\_\_.

11. 二次函数  $y=ax^2+bx+c$  ( $a\neq 0$ ) 的图象如图所示, 对称轴为  $x=1$ ,  
给出下列结论: ①  $abc>0$ ; ②  $b^2=4ac$ ; ③  $4a+2b+c>0$ ; ④  $3a+c>0$ , 其中正确的结论是\_\_\_\_\_ (写出正确命题的序号)

12. 已知两个正数  $a, b$ , 可按规则  $c=ab+a+b$  扩充为一个新数  $c$

在  $a, b, c$  三个数中取两个较大的数, 按上述规则扩充得到一个新

数, 依次下去, 将每扩充一次得到一个新数称为一次

操作. (1) 若  $a=1, b=3$ , 按上述规则操作三次, 扩充所得的数是\_\_\_\_\_;

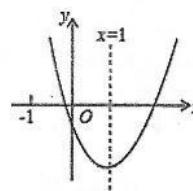
(2) 若  $p > q > 0$ , 经过 6 次操作后扩充所得的数为  $(q+1)^m(p+1)^n-1$  ( $m, n$  为正整数),  
则  $m+n$  的值为\_\_\_\_\_.

**三、解答题 (本小题共五个小题, 共 60 分. 答案写在答题卷上)**

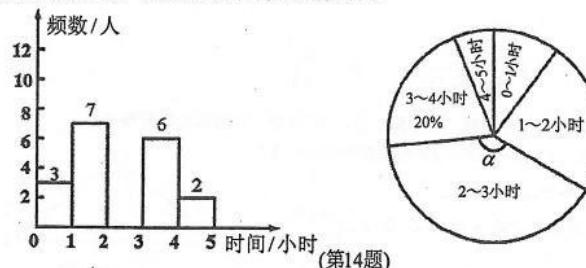
13. (本小题共两小题, 满分 12 分, 每小题 6 分)

(1) 先化简, 再求值:  $\left(\frac{2}{a+1} + \frac{a+2}{a^2-1}\right) \div \frac{a}{a-1}$ , 其中  $a=\sqrt{2}-1$ .

(2) 已知关于  $x, y$  的二元一次方程  $\begin{cases} 2x-y=2m \\ x+3y=m-1 \end{cases}$  的解满足  $x < y$ , 求  $m$  的取值范围



14. (本小题满分 10 分) 2015 年 1 月, 市教育局在全市中小学中选取了 63 所学校从学生的  
思想品德、学业水平、学业负担、身心发展和兴趣特长五个维度进行了综合评价. 评价小组  
在选取的某中学七年级全体学生中随机抽取了若干名学生进行问卷调查, 了解他们每天在课  
外用于学习的时间, 并绘制出如下不完整的统计图.



根据上述信息, 解答下列问题:

(1) 本次抽取的学生人数是\_\_\_\_人; 扇形统计图中的圆心角  $\alpha$  等于\_\_\_\_度;  
补全统计直方图; (4 分 = 1 分 + 1 分 + 2 分)

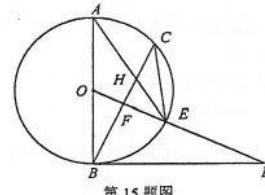
(2) 被抽取的学生还要进行一次 50 米跑测试, 每 5 人一组进行. 在随机分组时, 小红、

小花两名女生被分到同一个小组, 请用列表法或画树状图求出她们在抽道次时抽在相邻两道的概率. (6 分)

15. (本小题满分 12 分) 已知, 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 点  
 $C$  为  $\odot O$  上一点,  $OF \perp BC$  于点  $F$ , 交  $\odot O$  于点  $E$ ,  $AE$  与  $BC$  交  
于点  $H$ . 点  $D$  为  $OE$  的延长线上一点, 且  $\angle ODB=\angle AEC$ .

(1) 求证:  $BD$  是  $\odot O$  的切线; (2) 求证:  $CE^2=EH \cdot EA$ ;

(3) 若  $\odot O$  的半径为 5,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 求  $BH$  的长.



第 15 题图

16. (本小题满分 12 分) 大学毕业生小王响应国家“自主创业”的号召, 利用银行小额无息贷款  
开办了一家饰品店. 该店购进一种今年新上市的饰品进行销售, 饰品的进价为每件 40  
元, 售价为每件 60 元, 每月可卖出 300 件. 市场调查反映: 调整价格时, 售价每涨 1  
元每月要少卖 10 件; 售价每下降 1 元每月多卖 20 件. 为获得更大的利润, 现将饰品售  
价调整为  $60+x$  (元/件) ( $x > 0$  即售价上涨,  $x < 0$  即售价下降), 每月饰品销量为  $y$  (件),  
月利润为  $w$  (元).

(1) 直接写出  $y$  与  $x$  之间的函数关系式;

(2) 如何确定销售价格才能使月利润最大? 求最大月利润;

(3) 为了使每月利润不少于 6000 元, 应如何控制销售价格?

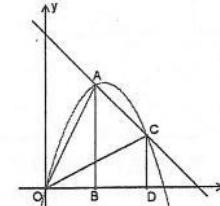
17. (本小题满分 14 分)

如图, 把两个全等的  $Rt\triangle AOB$  和  $Rt\triangle COD$  放置于平  
面直角坐标系中, 使直角边  $OB, OD$  在  $x$  轴上. 已知点  $A(1,$   
 $2)$ , 过  $A, C$  两点的直线分别交  $x$  轴、 $y$  轴于点  $E, F$ . 抛物  
线  $y=ax^2+bx+c$  经过  $O, A, C$  三点.

(1) 求该抛物线的函数解析式;

(2) 点  $P$  为线段  $OC$  上的一个动点, 过点  $P$  作  $y$  轴的平行  
线交抛物线于点  $M$ , 交  $x$  轴于点  $N$ , 问是否存在这样的  
点  $P$ , 使得四边形  $ABPM$  为等腰梯形? 若存在, 求出此时点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理  
由;

(3) 若  $\triangle AOB$  沿  $AC$  方向平移 (点  $A$  始终在线段  $AC$  上, 且不与点  $C$  重合),  $\triangle AOB$  在平  
移的过程中与  $\triangle COD$  重叠部分的面积记为  $S$ . 试探究  $S$  是否存在最大值? 若存在, 求出这个最  
大值; 若不存在, 请说明理由.



## 新生综合测试数学答案

一、选择题答题卡 (下列各题 A、B、C、D 四个选项中, 有且仅有一个是正确的, 每小题 5 分, 共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	C	B	C	B	A

二、填空题答题卡 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

9、 $60^\circ$       10、 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$       11、①④      12、 $255$       21

三、解答题 (本小题共六个小题, 共 60 分)

$$\begin{aligned} 13.(1) \text{ 解: 原式} &= \left( \frac{2}{a+1} + \frac{a+2}{(a+1)(a-1)} \right) \times \frac{a-1}{a} = \frac{2(a-1)+(a+2)}{(a+1)(a-1)} \times \frac{a-1}{a} \\ &= \frac{3}{a+1} \end{aligned}$$

-----3 分

$$\text{当 } a=\sqrt{2}-1 \text{ 时, } \text{原式} = \frac{3}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{-----6 分}$$

解: 由二元一次方程组  $\begin{cases} 2x-y=2m \\ x+3y=m-1 \end{cases}$  得  $\begin{cases} x=m-\frac{1}{7} \\ y=-\frac{2}{7} \end{cases}$

$\because x < y$ ,  
 $\therefore m-\frac{1}{7} < -\frac{2}{7}$ ,

解得  $m < -\frac{1}{7}$ .

所以  $m$  的取值范围是  $m < -\frac{1}{7}$ .

(2) -----12 分 (其中解出  $x, y$  3 分,  $m$  范围 3 分)

14. 解: (1)  $6+20\% = 30$ ,  $(30 - 3 - 7 - 6 - 2) \div 30 \times 360 = 12 \div 30 \times 26 = 144^\circ$ ,

答: 本次抽取的学生人数是 30 人; 扇形统计图中的圆心角  $\alpha$  等于  $144^\circ$ ;

故答案为: 30,  $144^\circ$ ; -----2 分

补全统计图如图所示: -----4 分

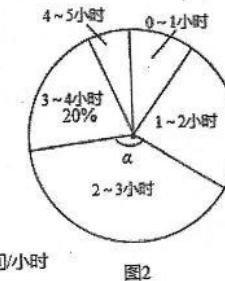
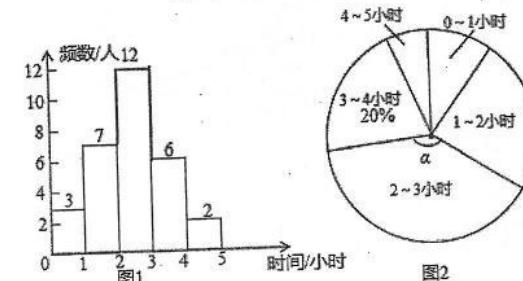
(2) 根据题意列表如下: 设竖列为小红抽取的跑道, 横排为小花抽取的跑道,

小红	小花	1	2	3	4	5
1			(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)
2		(1, 2)		(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)
3		(1, 3)	(2, 3)		(4, 3)	(5, 3)
4		(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)		(5, 4)
5		(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	

1

记小红和小花抽在相邻两道这个事件为 A,

$\therefore P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ . -----10 分 (其中列出表格得 3 分, 得出结果 3 分)



15.

(1) 证明:  $\because \angle ODB = \angle AEC$ ,  $\angle AEC = \angle ABC$ ,

$\therefore \angle ODB = \angle ABC$ ,

$\therefore OF \perp BC$ ,

$\therefore \angle BFD = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ODB + \angle DBF = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ABC + \angle DBF = 90^\circ$ ,

即  $\angle OBD = 90^\circ$ ,

$\therefore BD \perp OB$ ,

$\therefore BD$  是  $\odot O$  的切线;

(2) 证明: 连接 AC, 如图1所示:

$\therefore OF \perp BC$ ,

$\therefore \widehat{BE} = \widehat{CE}$ ,

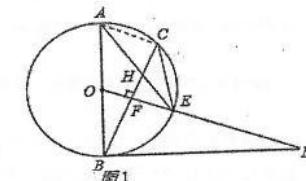
$\therefore \angle CAE = \angle ECB$ ,

$\therefore \angle CEA = \angle HEC$ ,

$\therefore \triangle CEH \sim \triangle AEC$ ,

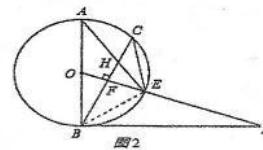
$\therefore \frac{CE}{EH} = \frac{EA}{CE}$ ,

$\therefore CE^2 = EH \cdot EA$ ;



2

(1) 解：连接BE，如图2所示：  
 ∵AB是 $\odot O$ 的直径。  
 ∴ $\angle AEB=90^\circ$ 。  
 ∵ $\odot O$ 的半径为5， $\sin \angle BAE = \frac{3}{5}$ ，  
 ∴ $AB=10$ ， $BE=AB \cdot \sin \angle BAE = 10 \times \frac{3}{5} = 6$ ，  
 ∴ $EA=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$ ，  
 ∵ $\widehat{BE}=\widehat{CE}$ ，  
 ∴ $BE=CE=6$ ，  
 ∵ $CE^2=EH \cdot EA$ ，  
 ∴ $EH=\frac{CE^2}{EA}=\frac{9}{8}$ ，  
 在Rt $\triangle BEH$ 中， $BH=\sqrt{BE^2+EH^2}=\sqrt{6^2+(\frac{9}{8})^2}=\frac{15}{4}$ 。



本小题每问4分

16.

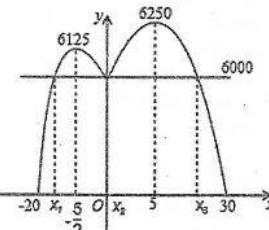
解：(1) 由题意可得： $y=\begin{cases} 300-10x(0 \leq x \leq 30) \\ 300-20x(-20 \leq x < 0) \end{cases}$

(2) 由题意可得： $w=\begin{cases} (20+x)(300-10x)(0 \leq x \leq 30) \\ (20+x)(300-20x)(-20 \leq x < 0) \end{cases}$

化简得： $w=\begin{cases} -10x^2+100x+6000(0 \leq x \leq 30) \\ -20x^2-100x+6000(-20 \leq x < 0) \end{cases}$

即： $w=\begin{cases} -10(x-5)^2+6250(0 \leq x \leq 30) \\ -20(x+\frac{5}{2})^2+6125(-20 \leq x < 0) \end{cases}$

由题意可知w应取整数，故当x=-2或x=-3时，w<6125<6250，  
 故当销售价格为65元时，利润最大，最大利润为6250元；



(3) 由题意 $w \geq 6000$ ，如图，令 $w=6000$ ，

即 $6000=-10(x-5)^2+6250$ ， $6000=-20(x+\frac{5}{2})^2+6125$ ，

解得： $x_1=-5$ ， $x_2=0$ ， $x_3=10$ ，

$-5 \leq x \leq 10$ ，

故将销售价格控制在55元到70元之间（含55元和70元）才能使每月利润不少于6000元。

(本小题第一问2分，第二问6分，第三问4分)

17. (1) 将 $A(1, 2)$ 、 $O(0, 0)$ 、 $C(2, 1)$ 分别代入 $y=ax^2+bx+c$ ，

得 $\begin{cases} a+b+c=2, \\ c=0, \\ 4a+2b+c=1. \end{cases}$ 解得 $a=-\frac{3}{2}$ ， $b=\frac{7}{2}$ ， $c=0$ 。所以 $y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x$ 。-----4分

(2) 如图2，过点P、M分别作梯形ABPM的高 $PP'$ 、 $MM'$ ，如果梯形 $ABPM$ 是等腰梯形，那么 $AM'=BP'$ ，因此 $yA-yM=yP'-yB$ 。

直线 $OC$ 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x$ ，设点P的坐标为 $(x, \frac{1}{2}x)$ ，那么 $M(x, -\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x)$ 。

解方程 $2-\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x\right)=\frac{1}{2}x$ ，得 $x_1=\frac{2}{3}$ ， $x_2=2$ 。

$x=2$ 的几何意义是 $P$ 与 $C$ 重合，此时梯形不存在。所以 $P(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ 。-----8分

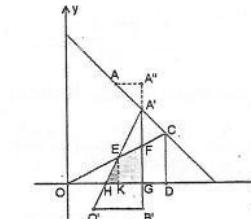
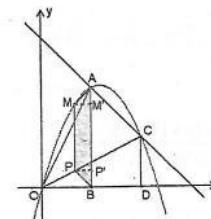


图2

(3) 如图3， $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 重叠部分的形状是四边形 $EFGH$ ，作 $EK \perp OD$ 于 $K$ 。设点 $A'$ 移动的水平距离为 $m$ ，那么 $OG=1+m$ ， $GB'=m$ 。

在 $\text{Rt}\triangle OFG$ 中， $FG=\frac{1}{2}OG=\frac{1}{2}(1+m)$ ，所以 $S_{\triangle OFG}=\frac{1}{4}(1+m)^2$ 。

在 $\text{Rt}\triangle A'HG$ 中， $A'G=2-m$ ，所以 $HG=\frac{1}{2}A'G=\frac{1}{2}(2-m)=1-\frac{1}{2}m$ 。

所以 $OH=OG-HG=(1+m)-(1-\frac{1}{2}m)=\frac{3}{2}m$ 。

在 $\text{Rt}\triangle OEH$ 中， $OK=2EK$ ；在 $\text{Rt}\triangle EHK$ 中， $EK=2HK$ ；所以 $OK=4HK$ 。

因此 $OK=\frac{4}{3}OH=\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}m=2m$ ，所以 $EK=\frac{1}{2}OK=m$ 。

所以 $S_{\triangle OEH}=\frac{1}{2}OH \cdot EK=\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}m \cdot m=\frac{3}{4}m^2$ 。

于是 $S=S_{\triangle OFG}-S_{\triangle OEH}=\frac{1}{4}(1+m)^2-\frac{3}{4}m^2=-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{8}$ 。

因为 $0 < m < 1$ ，所以当 $m=\frac{1}{2}$ 时， $S$ 取得最大值，最大值为 $\frac{3}{8}$ 。-----14分